SYMULACJA RUCHU UKŁADU MECHANICZNEGO ZE ZDERZENIAMI

Wiesław Grzesikiewicz

Politechnika Warszawska, Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych

Artur Zbiciak

Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej

Opis ruchu układu mechanicznego

Układ swobodny:

$$M(X)\ddot{X} = f\left(t, X, \dot{X}\right)$$

Układ z więzami geometrycznymi:

$$M(X)\ddot{X} = f\left(t, X, \dot{X}\right) + r$$

$$X \in \Omega(t)$$

$$r^{\mathrm{T}}\left(\widetilde{X} - X\right) \geq 0 \quad \forall \widetilde{X} \in \Omega(t)$$

Następstwa ograniczeń geometrycznych

$$\boxed{\dot{X} \in \mathcal{D}\Omega(t, X) \qquad \ddot{X} \in \mathcal{D}^2\Omega\left(t, X, \dot{X}\right)}$$

$$\mathcal{D}\Omega(t_o, X_o) := \left\{ V \in R^N : \liminf_{h \to +0} \operatorname{dist}\left(V, \frac{\Omega(t_o + h) - X_o}{h} \right) = 0 \right\}$$

$$\mathcal{D}^2\Omega(t, X, V) := \left\{ a \in R^N : \liminf_{\substack{h \to 0+ \\ w \to V}} \operatorname{dist}\left(a, \frac{\mathcal{D}\Omega(t + h, X + hw) - V}{h} \right) = 0 \right\}$$

$\mathcal{D}\Omega(t, X)$ - zbiór dopuszczalnych prędkości

$\mathcal{D}^2\Omega\left(t, X, \dot{X}\right)$ - zbiór dopuszczalnych przyspieszeń

Ograniczenia działają, czyli powstaje reakcja, wtedy gdy:

(a) $X(t) \in \mathrm{Fr}\,\Omega(t)$ oraz $\dot{X}(t) \in \mathrm{Fr}\,\mathcal{D}\,\Omega(t, X)$

wtedy powstaje siła reakcji;

(b) $X(t) \in \mathrm{Fr}\,\Omega(t)$ oraz $\dot{X}(t) \notin \mathrm{Fr}\,\mathcal{D}\,\Omega(t, X)$

wtedy powstaje zderzenie, czyli działa reakcyjny impuls siły.

Obliczanie siły reakcji na podstawie zasady Gaussa – przypadek (a):

$$M(X)\ddot{X} = f\left(t, X, \dot{X}\right) + r$$

$$\ddot{X} \in \mathcal{D}^2\,\Omega\left(t, X, \dot{X}\right)$$

$$r^{\mathrm{T}}\left(a - \ddot{X}\right) \geq 0 \quad \forall\, a \in \mathcal{D}^2\,\Omega\left(t, X, \dot{X}\right)$$

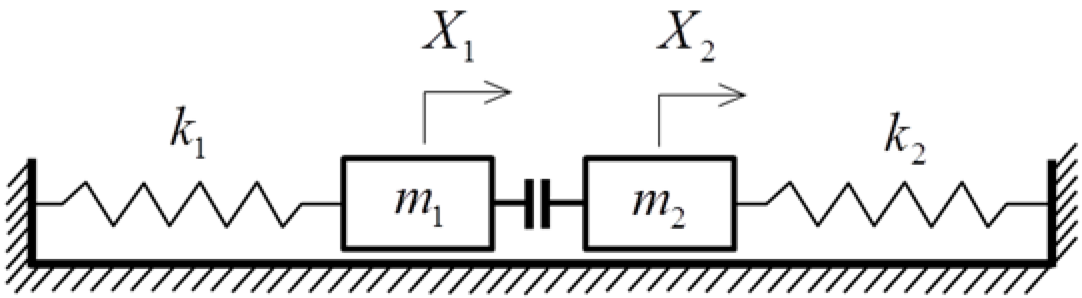
Obliczanie reakcyjnego impulsu siły i prędkości po zderzeniu plastycznym – przypadek (b):

$$M(X)\dot{X}^{+} - M(X)\dot{X}^{-} = \widetilde{r}$$

$$\dot{X}^{+} \in \mathcal{D}\Omega(t, X)$$

$$\widetilde{r}^{\mathrm{T}}\left(v - \dot{X}^{+}\right) \geq 0 \quad \forall\, v \in \mathcal{D}\Omega(t, X)$$

Przykład obliczeniowy



$$m_1 = 200\,\mathrm{kg}$$

$$m_2 = 100\,\mathrm{kg}$$

$$k_1 = k_2 = 8000\,\mathrm{N/m}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &M\ddot{X} = -KX + \lambda G \\ &G^{\mathrm{T}} X \geq 0 \\ &\lambda \geq 0,\ \ G^{\mathrm{T}} X \geq 0,\ \ \lambda G^{\mathrm{T}} X = 0 \end{aligned}}$$

Warunki początkowe:

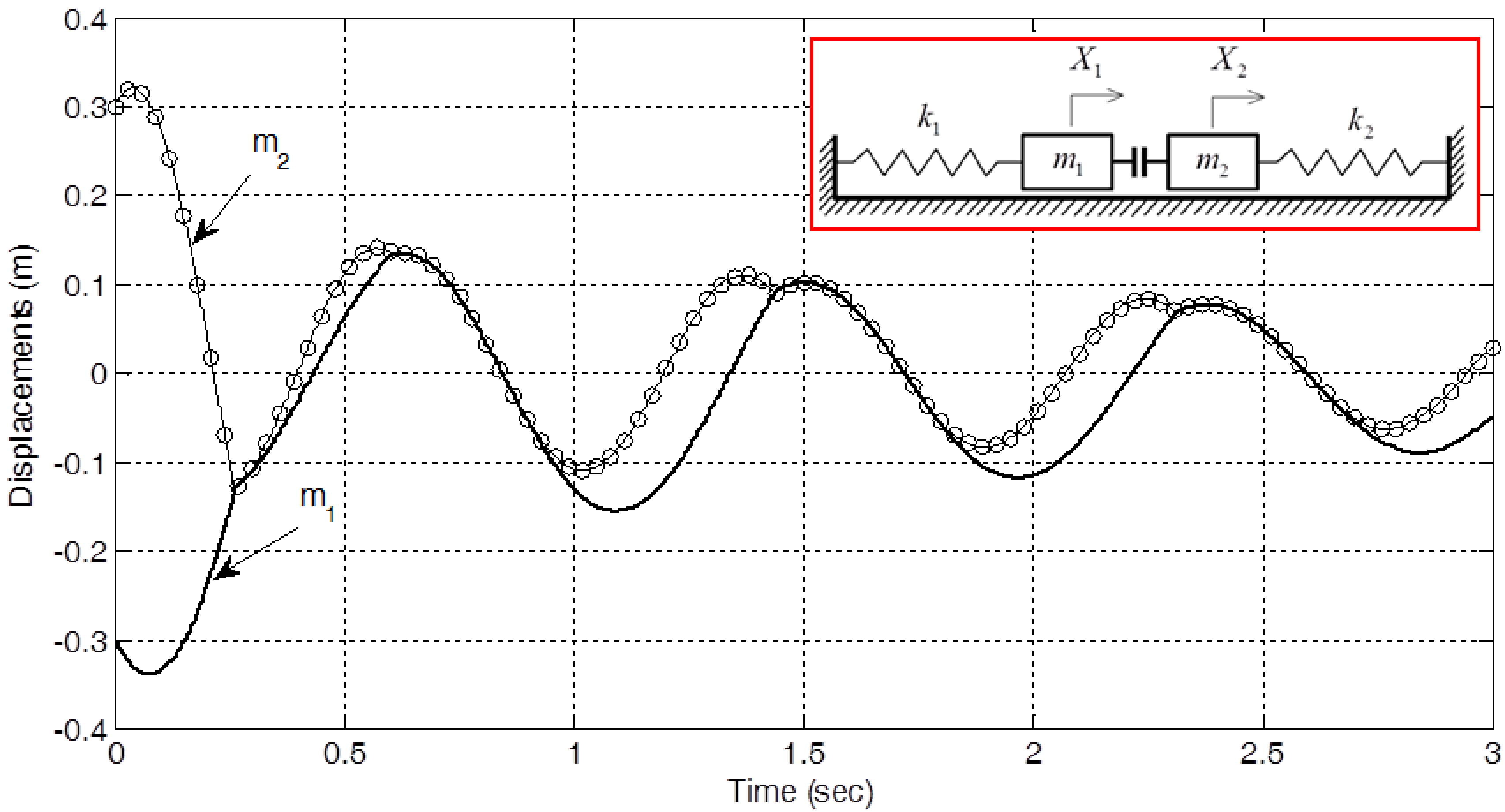
$$X(0) = X_{\circ}$$

$$V(0) = V_{\circ}$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix},\ \ K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix},\ \ G = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

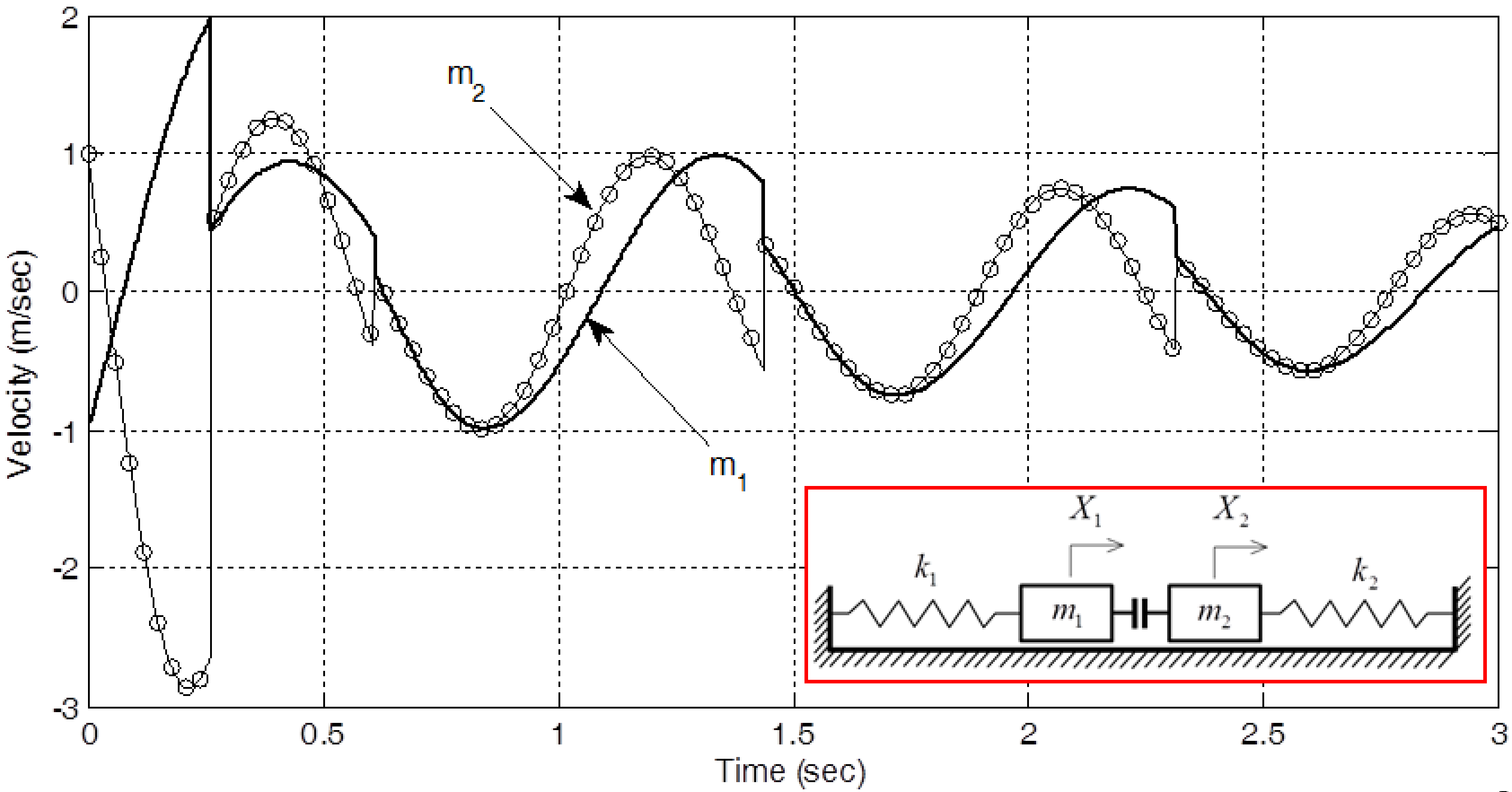
Przebiegi czasowe przemieszczeń

Warunki początkowe: $X(0)=\begin{bmatrix}-0.3\\ 0.3\end{bmatrix}[\mathrm{m}]$ $V(0)=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}[\mathrm{m/s}]$

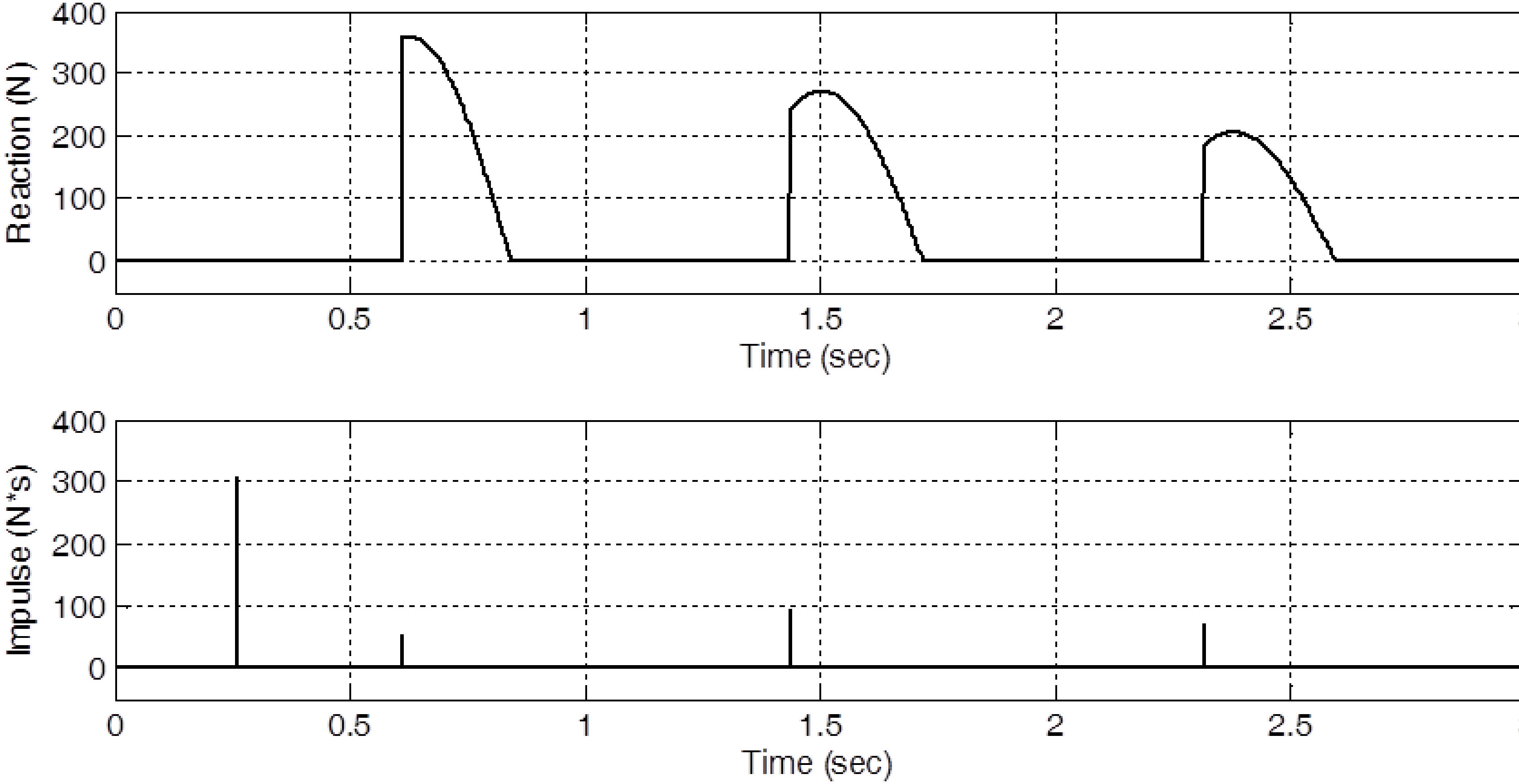


Przebiegi czasowe prędkości

Warunki początkowe: $X(0)=\begin{bmatrix}-0.3\\ 0.3\end{bmatrix}[\mathrm{m}]$ $V(0)=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}[\mathrm{m/s}]$



Przebiegi czasowe reakcji i impulsów



Obliczanie reakcyjnego impulsu siły i prędkości po zderzeniu sprężysto-plastycznym (wg hipotezy Newtona):

$$\boxed{\begin{aligned} & M(X)\dot{X}^{+} - M(X)\dot{X}^{-} = \tilde{r} \\ & \dot{X}^{+} \in \mathcal{D}\Omega(t,X) \\ & \tilde{r}^{\mathrm{T}}\left(v - \dot{X}^{+}\right) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}\Omega(t,X) \end{aligned}}$$

I faza:
zderzenie plastyczne

$$\boxed{M(X)\dot{X}^{*} - M(X)\dot{X}^{+} = \beta\tilde{r}}$$

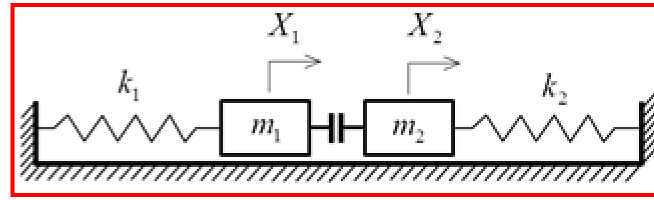
II faza:
odprężenie

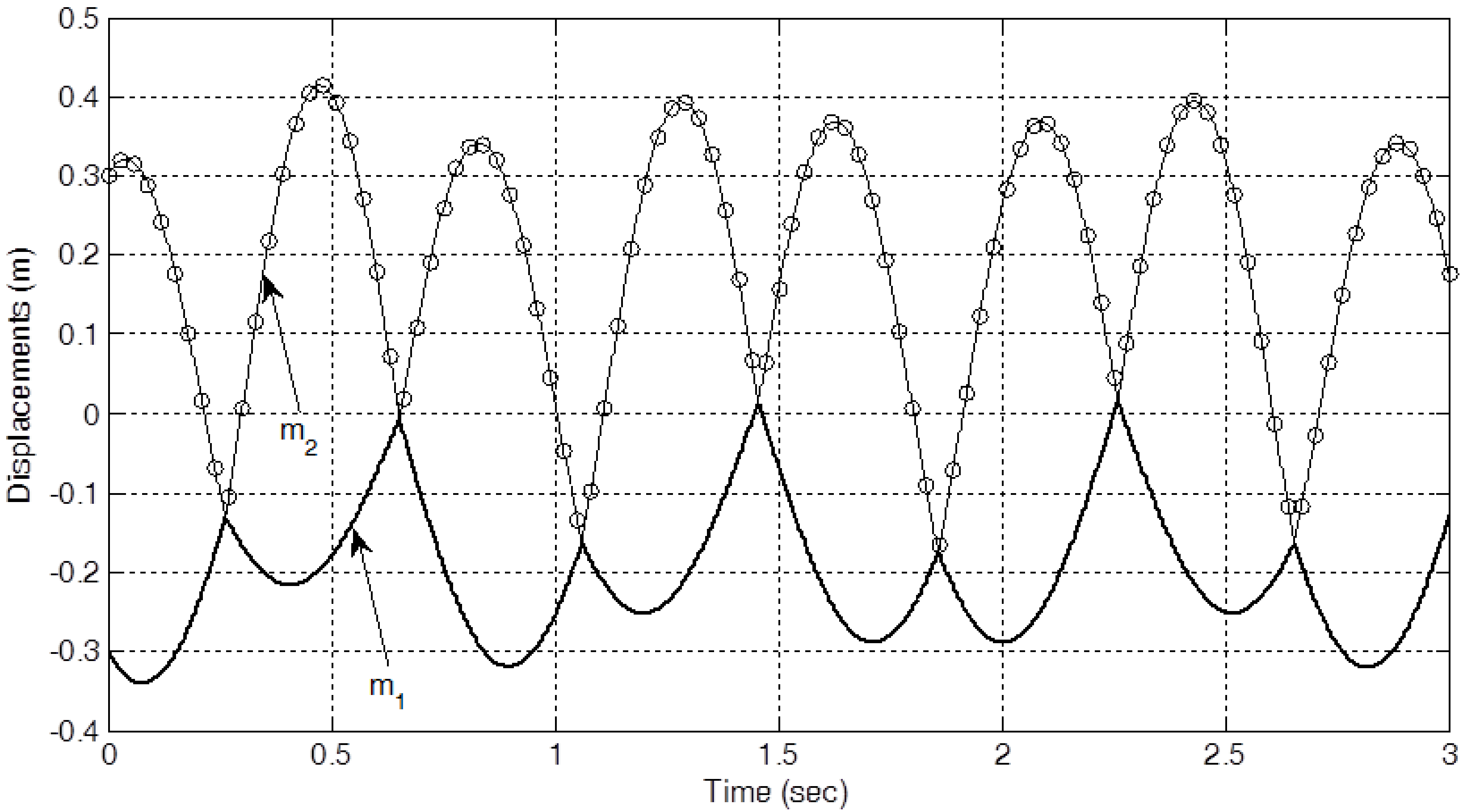
$\dot{X}^{*}$ - prędkość po zderzeniu sprężysto-plastycznym

β - współczynnik restytucji $\beta \in [0,1]$

Przykład obliczeniowy cd. – zderzenia sprężyste $\beta = 1$

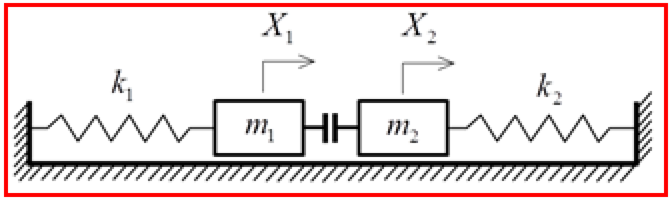
Przebiegi czasowe przemieszczeń

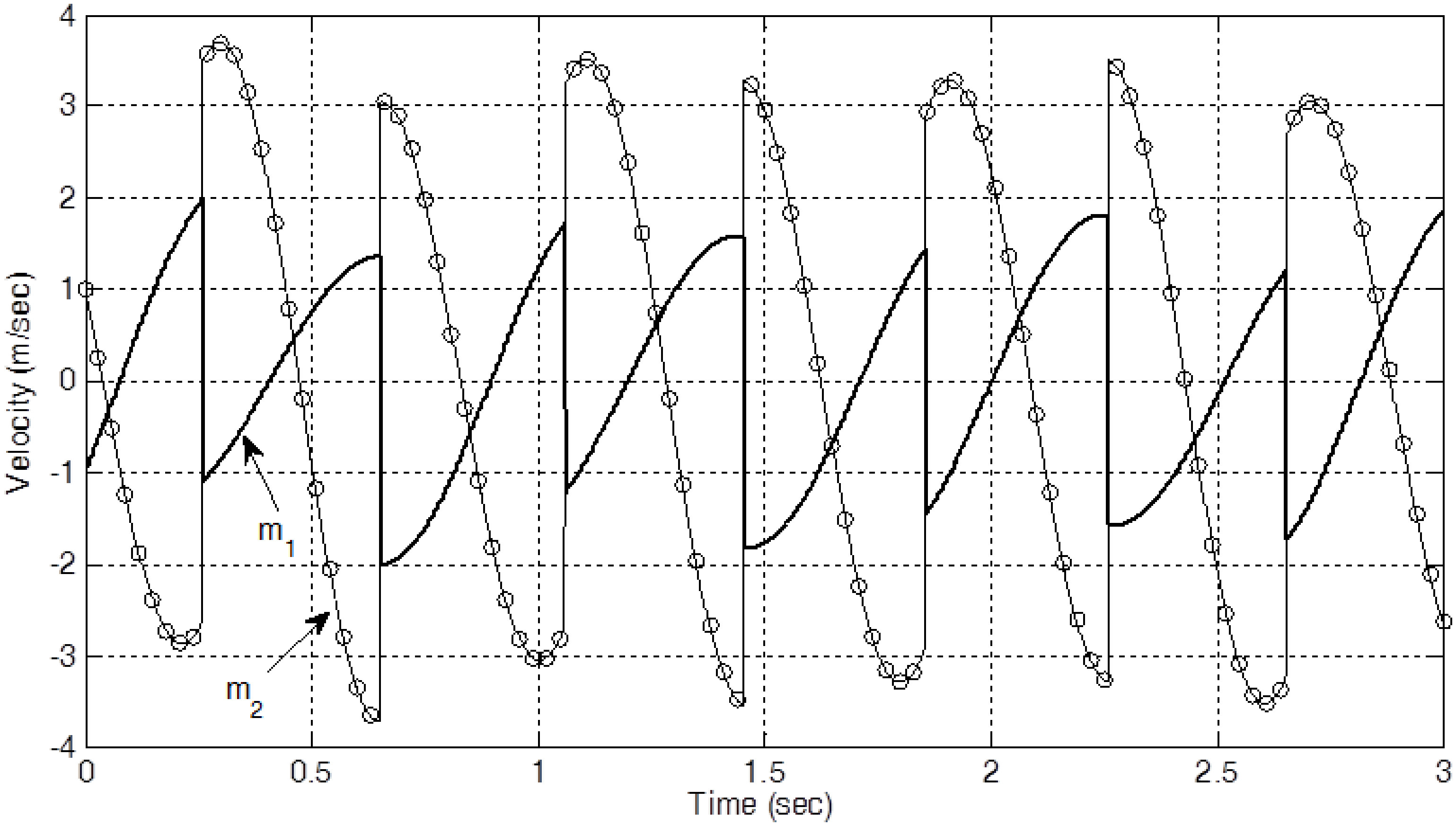




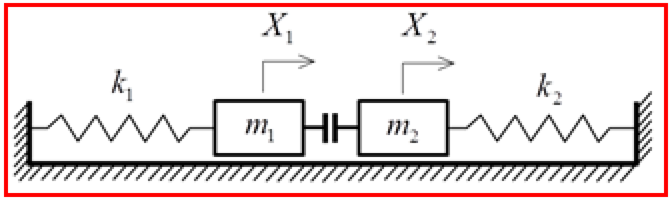
Przykład obliczeniowy cd. – zderzenia sprężyste $\beta = 1$

Przebiegi czasowe prędkości

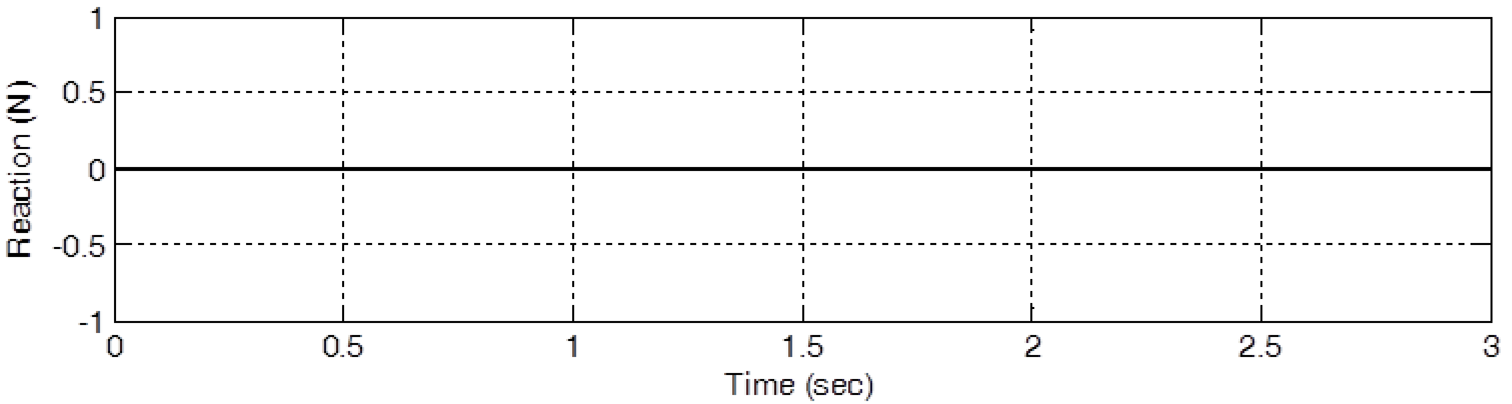


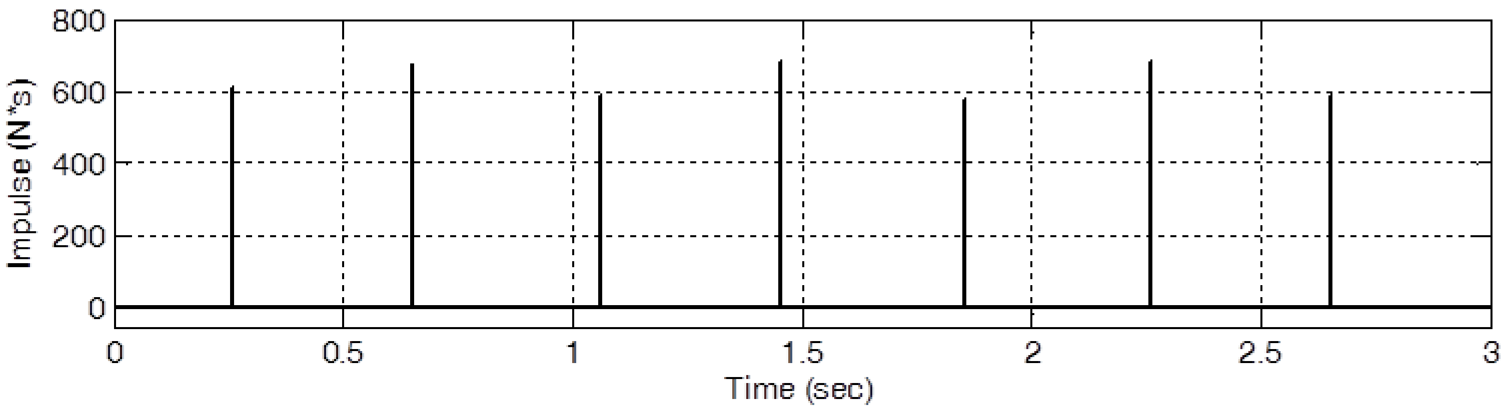


Przykład obliczeniowy cd. – zderzenia sprężyste $\beta = 1$



Przebiegi czasowe impulsów





Dziękuję za uwagę